Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 8

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

6 - 6 - 2012

Άσκηση 1. *Να δείξετε ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) *κατά γωνία* ϑ, *γύρω από άξονα* (ε) *ο οποίος είναι κάθετος στο* (Π).

Στη συνέχεια να βρεθούν:

(1) *Η γωνία στροφής* ϑ.
(2) *Ο άξονας* (ε).
(3) *Το επίπεδο* (Π).

Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 8

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης - Α. Μπεληγιάννης

Βοηθοι Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

6 - 6 - 2012

Άσκηση 1. *Να δείξετε ότι ο πίνακας*

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

παριστάνει στροφή επιπέδου (Π) *κατά γωνία* ϑ, *γύρω από άξονα* (ε) *ο οποίος είναι κάθετος στο* (Π).

Στη συνέχεια να βρεθούν:

(1) *Η γωνία στροφής* ϑ.
(2) *Ο άξονας* (ε).
(3) *Το επίπεδο* (Π).

Λύση. *Ο πίνακας* A *είναι ορθογώνιος διότι:*

$${}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

και έχει ορίζουσα $+1$ *διότι:*

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}) = 1$$

Συνεπώς από το Θεώρημα του Euler έχουμε ότι ο πίνακας A *παριστάνει στροφή επιπέδου* (Π) *κατά γωνία* ϑ, *γύρω από άξονα* (ε) *ο οποίος είναι κάθετος στο* (Π).

• **Άξονας Στροφής:** *Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι ο πίνακας* A *έχει ως ιδιοτιμή το* $\lambda = 1$. *Βρίσκουμε ένα ιδιοδιάνυσμα* $\vec{e}_1$ *το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή* $\lambda = 1$*:*

$$A \cdot X = 1 \cdot X \implies \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x - y + \sqrt{2}z = 0 \\ x - y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Άρα ένα ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$, *είναι το διάνυσμα-στήλη*

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

και ένα μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 1$ είναι το

$$\vec{\varepsilon}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

Σύμφωνα με την θεωρία, ο άξονας περιστροφής είναι ο μονοδιάστατος υπόχωρος ο οποίος παράγεται από το $\vec{e}_1$, ή ισοδύναμα από το $\vec{\varepsilon}_1$:

$$(\varepsilon): \qquad \{\kappa\vec{\varepsilon}_1 \mid \kappa \in \mathbb{R}\}$$

• **Επίπεδο Στροφής:** *Συμπληρώνουμε το διάνυσμα $\vec{\varepsilon}_1$ σε μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}_3$. Για να το επιτύχουμε αυτό αρκεί να βρούμε μια ορθοκανονική βάση του $\{\vec{\varepsilon}_1\}^{\perp}$:*

$$\begin{aligned}
\big\{\vec{\epsilon}_1\big\}^{\perp} &= \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}_3 \mid \big\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \big\rangle = 0\Big\} \\
&= \Big\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x + y = 0\Big\} \\
&= \Big\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid y = -x \text{ και } z \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \Big\{ \begin{pmatrix}x\\-x\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}_3 \mid x, z \in \mathbb{R}\Big\} \\
&= \mathcal{L}\big(\vec{e}_2, \vec{e}_3\big) \ \text{ ο υπόχωρος του } \mathbb{R}_3 \text{ ο οποίος παρτάγεται από τα } \vec{e}_2, \vec{e}_3
\end{aligned}$$

όπου:

$$\vec{e}_2 := \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Επειδή, όπως βλέπουμε εύκολα τα $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, θα αποτελούν μια βάση του $\{\vec{e}_1\}^{\perp}$ την οποία κάνουμε ορθοκανονική με την διαδικασία Gram-Schmidt:

$$\vec{\varepsilon}_2 := \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon}_3 := \frac{\vec{e}_3}{\|\vec{e}_3\|} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Τότε ως γνωστόν, το επίπεδο περιστροφής (Π) ορίζεται από το 2-διάστατο υπόχωρο ο οποίος παράγεται από τα $\vec{\varepsilon}_2$, $\vec{\varepsilon}_3$:

$$(\Pi): \qquad \Big\{\kappa\vec{\varepsilon}_2 + \lambda\vec{\varepsilon}_3 \mid \kappa, \lambda \in \mathbb{R}\Big\}$$

• **Γωνία Στροφής:** *Ώς γνωστόν το συνημίτονο της γωνίας περιστροφής ϑ υπολογίζεται ως εξής:*

$$\cos(\vartheta) = \frac{\mathrm{Tr}A - 1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

Άρα η γωνία περιστροφής είναι

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \qquad \square$$